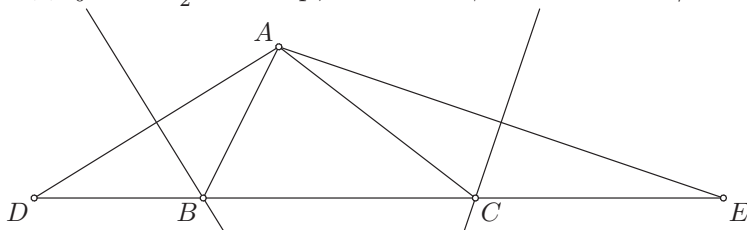


2) β, γ, p

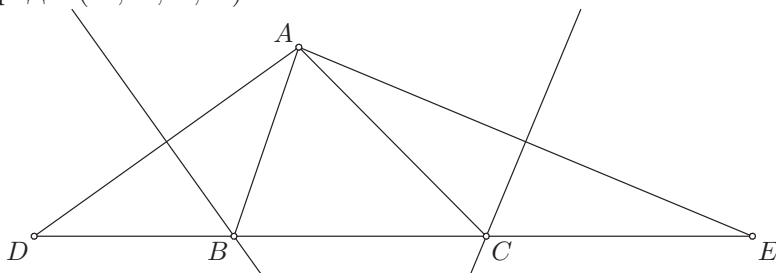
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. такав да је $\frac{BC+CA+AB}{2} = p$, $\angle ABC = \beta$ и $\angle BCA = \gamma$.



Нека су D, E тачке на правој BC такве да је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$, $DB = AB$ и $CE = AC$. Тада је $DE = AB + BC + CA = 2p$. Троугао $\triangle ABD$ је једнакокраки, јер је $AB = DB$, па следи да је $\angle ADB = \angle DAB = \varphi$. Угао $\angle ABC$ је спољашњи угао тог троугла, па је он једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\angle ADB$ и $\angle DAB$. Дакле, $\beta = \varphi + \varphi = 2\varphi$, па следи да је $\varphi = \frac{\beta}{2}$. Дакле, $\angle ADB = \frac{\beta}{2}$. Слично се доказује да је $\angle AEC = \frac{\gamma}{2}$.

У троуглу $\triangle ADE$ важи да је $DE = 2p$, $\angle ADE = \angle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\angle AED = \angle AEC = \frac{\gamma}{2}$, па тај троугао у мемо да конструишемо. Како је $DB = AB$, следи да тачка B припада медијатриси дужи DA . Слично, из $CE = AC$ следи да тачка C припада медијатриси дужи AE .

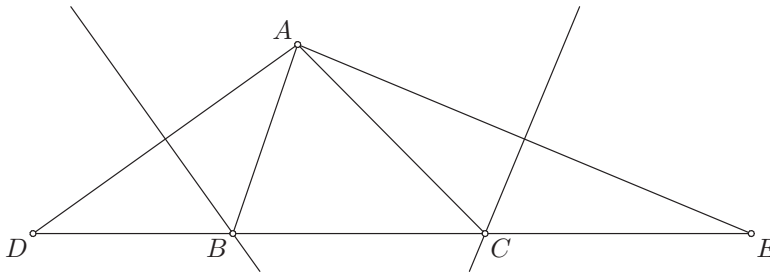
Конструкција: Конструишемо троугао $\triangle ADE$ такав да је $DE = 2p$, $\angle ADE = \frac{\beta}{2}$, $\angle AED = \frac{\gamma}{2}$. Конструишемо медијатресе дужи AD и AE и означимо редом њихове пресеке с дужи DE са B, C тако да важи распоред $\mathcal{B}(D, B, C, E)$.



Доказ: Треба доказати да је $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$, да је $\angle ABC = \beta$ и да је $\angle BCA = \gamma$. ПК је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$, па је $DE = DB + BC + CE$. Тачка B припада медијатриси дужи AD , па је $DB = AB$, а тачка C припада медијатриси дужи AE , па је $EC = AC$. Следи да је $DE = AB + BC + AC$. Такође, ПК је $DE = 2p$, па следи да је $AB + BC + AC = 2p$, односно да је $\frac{AB+BC+AC}{2} = p$.

Из $DB = AB$ следи да је троугао $\triangle ADB$ једнакокрак, па имамо да је $\angle DAB = \angle ADB$. ПК важи да је $\mathcal{B}(D, B, C, E)$ и $\angle ADE = \frac{\beta}{2}$, па је

$\angle ADB = \angle ADE = \frac{\beta}{2}$. Угао $\angle ABC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ADB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\angle DAB$ и $\angle ADB$. Дакле, $\angle ABC = \angle DAB + \angle ADB = \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{2} = \beta$. Слично се доказује и да је $\angle BCA = \gamma$.



Дискусија: Ако је $\beta + \gamma \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме су то унутрашњи углови, па задатак нема решења.

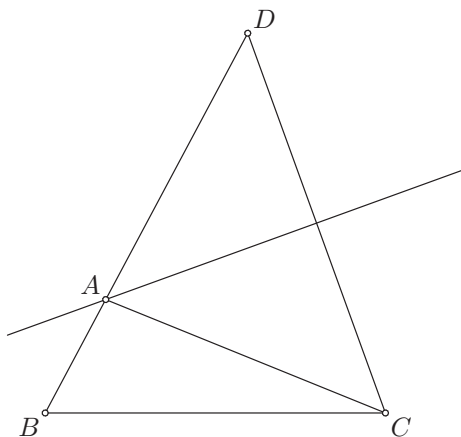
Нека је $\beta + \gamma < \pi$. Тада је $\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} < \frac{\pi}{2} < \pi$, па постоји јединствен троугао $\triangle ADE$ до на подударност. Да ли медијатрисе странице AD и AE секу страницу DE редом у тачкама B, C тако да важи $\mathcal{B}(D, B, C, E)$? Угао $\angle ADE = \frac{\beta}{2}$ је оштар, па медијатриса странице AD , која је нормална на краку DA тога угла, сече његов други крак. Дакле, тачка B постоји и важи $B, E \doteq D$. Нама је потребно да важи распоред $\mathcal{B}(D, B, E)$, а то је тачно ако је $\angle DAB < \angle DAE$. Како је $\angle DAB = \angle ADB = \frac{\beta}{2}$ и $\angle DAE = \pi - \angle ADE - \angle AED = \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, следи да важи $\mathcal{B}(D, B, E)$ ако испуњено $\frac{\beta}{2} < \pi - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}$, односно $\beta + \frac{\gamma}{2} < \pi$, што је испуњено, јер је $\beta + \gamma < \pi$. Треба још проверити да ли медијатриса странице AE сече EB у тачки C таквој да важи $\mathcal{B}(B, C, E)$, јер ће онда важити распоред $\mathcal{B}(D, B, C, E)$.

Угао $\angle AEB = \angle AED = \frac{\gamma}{2}$ је оштар, па медијатриса странице AE , која је нормална на краку EA тога угла, сече његов други крак EB у тачки C таквој да је $B, C \doteq E$. При томе важи распоред $\mathcal{B}(E, C, B)$ ако је $\angle EAC < \angle EAB$. Како је $\angle EAC = \angle AEC = \frac{\gamma}{2}$ и $\angle EAB = \pi - \angle ABE - \angle AEB = \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}$, следи да је $\mathcal{B}(E, C, B)$ испуњен ако је $\frac{\gamma}{2} < \pi - \beta - \frac{\gamma}{2}$, односно ако је $\beta + \gamma < \pi$.

Дакле, ако је $\beta + \gamma < \pi$, постоји јединствено решење до на подударност.

3) $\alpha, a, b + c$

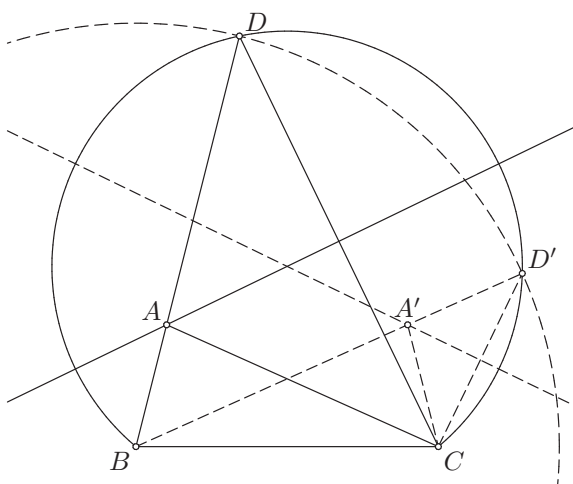
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка, тј. такав да је $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$ и $AC + AB = b + c$.



Нека је D тачка таква да важи $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $AD = AC$. Тада је $BD = BA + AD = BA + AC = b + c$. Такође, троугао $\triangle ACD$ је једнакокраки, па је $\angle ADC = \angle ACD = \varphi$. Угао $\angle BAC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ACD$, па је једнак збиру његових унутрашњих несуседних углова $\angle ADC$ и $\angle ACD$. Следи да је $\alpha = \varphi + \varphi$, тј. $\varphi = \frac{\alpha}{2}$. Дакле, $\angle ADC = \frac{\alpha}{2}$.

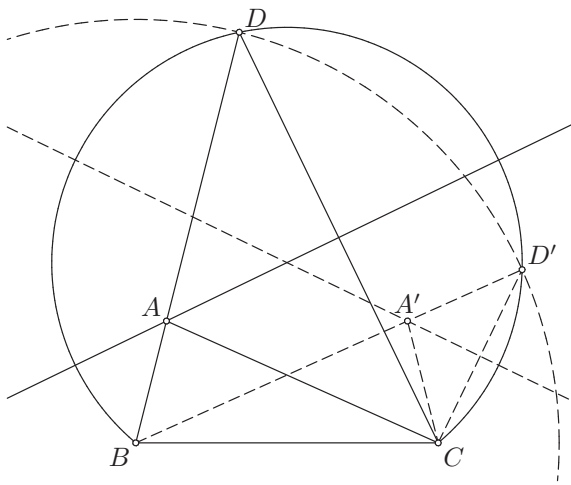
У троуглу $\triangle BCD$ је $BC = a$, $BD = b + c$ и $\angle BDC = \angle ADC = \frac{\alpha}{2}$, па тај троугао унемо да конструишемо. Из $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $AD = AC$ следи да тачка A припада пресеку медијатрисе странице CD и странице BD .

Конструкција:



Конструишемо троугао $\triangle BCD$ такав да је $BC = a$, $BD = b + c$ и $\angle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Конструишемо медијатрису странице CD и означимо са A њен пресек са страницом BD (дакле, да важи $\mathcal{B}(D, A, B)$).

Доказ: Треба доказати да је $\angle BAC = \alpha$, $BC = a$ и $AC + AB = b + c$. ПК је $BC = a$. Тачка A припада страници BD , па важи $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $BD = BA + AD$. С друге стране, тачка A припада медијатриси странице CD , па је $AD = AC$. Дакле, $BD = BA + AC$, а како је ПК $BD = b + c$, следи да је $BA + AC = b + c$. Троугао $\triangle ACD$ је једнакокрак, па је $\angle ACD = \angle ADC$. Како је ПК $\mathcal{B}(B, A, D)$ и $\angle BDC = \frac{\alpha}{2}$, следи да је $\angle ADC = \angle BDC = \frac{\alpha}{2}$. Угао $\angle BAC$ је спољашњи угао троугла $\triangle ACD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\angle ACD$ и $\angle ADC$. Следи да је $\angle BAC = \angle ACD + \angle ADC = \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$.



Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Ако је $b + c \leq a$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је $b + c$ збир двеју страница а a трећа страница (због неједнакости троугла), па задатак нема решења.

Нека је $\alpha < \pi$ и $b + c > a$. Да би постојао троугао $\triangle BCD$, потребно је да буде испуњено $BD \leq \frac{BC}{\sin \angle BDC}$, односно $b + c \leq \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Нама није познато да ли је угао $\angle BCD$ оштар, прав или туп. Како је $BD = b + c > a = BC$, следи да постоје два неподударна троугла $\triangle BCD$ ако је $b + c < \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$, односно да је троугао $\triangle BCD$ јединствен ако је $b + c = \frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$.

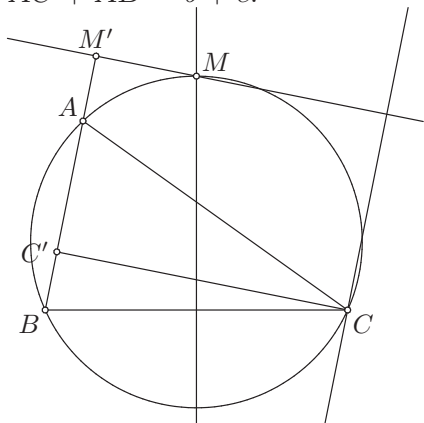
Треба још проверити да ли медијатриса странице CD сече страницу BD , тј. да ли важи $\mathcal{B}(D, A, B)$. С обзиром на то да је $\angle BDC = \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, медијатриса дужи CD сигурно сече полуправу DB у некој тачки A (права нормална на једном краку оштрог угла сече други крак). Троугао $\triangle CDA$ је једнакокраки ($AC = AD$), па је $\angle ACD = \angle ADC = \angle BDC$. Тачка A припада дужи BD ако и само ако је $\angle DCA < \angle DCB$, односно ако и само ако је $\angle BDC < \angle DCB$. На основу неједнакости троугла, ово

важи ако и само ако је $BC < DB$, тј. $a < b+c$, а ово смо претпоставили да важи. Дакле, за сваки од неподударних троуглова $\triangle BCD$ постоји тачка A , па постоје два неподударна троугла $\triangle ABC$.

Дакле, ако је $\alpha < \pi$, $b+c > a$ и $\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} > b+c$, постоје два неподударна решења. Ако је $\alpha < \pi$, $b+c > a$ и $\frac{a}{\sin \frac{\alpha}{2}} = b+c$, постоји јединствено решење до на подударност. У супротном нема решења.

4) а) $\beta, h_c, b+c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Ако је C' подножје висине из темена C , онда је $\angle ABC = \beta$, $CC' = h_c$ и $AC + AB = b+c$.



Нека су M, M' тачке из Великог задатка. Тада важи $A, M' \perp BC$ и $MM' \perp AB$. Следи да је $\angle M'BC = \beta$. На основу Великог задатка следи да је $BM' = \frac{1}{2}(b+c)$. Из $CC' = h_c$ следи да тачка C припада правој која је паралелна правој AB , тј. правој BM' , налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BM' с које се налази крак BC угла $\angle M'BC$. Тачка M припада правој која је нормална на правој BM' у тачки M' и медијатриси дужи BC . Коначно, тачка A припада правој BM' и описаном кругу троугла $\triangle BCM$, јер је то у ствари описани круг троугла $\triangle ABC$ коме тачка M припада на основу Великог задатка.

Конструкција: Конструирајмо дуж $BM' = \frac{1}{2}(b+c)$. Конструирајмо угао $\angle M'Bq = \beta$. Конструирајмо праву p која је паралелна правој BM' , налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BM' с које се налази крак Bq угла $\angle M'Bq$. У пресеку праве p и крака Bq означимо тачку C . Конструирајмо медијатрису m дужи BC . Конструирајмо нормалу n на правој BM' у тачки M' . У пресеку правих m и n означимо са M тачку такву да важи $M, M' \perp BC$. Конструирајмо описани круг l троугла $\triangle BMC$. У пресеку круга l и праве BM' означимо тачку A (различиту од тачке B) такву да важи $A, M' \perp BC$.

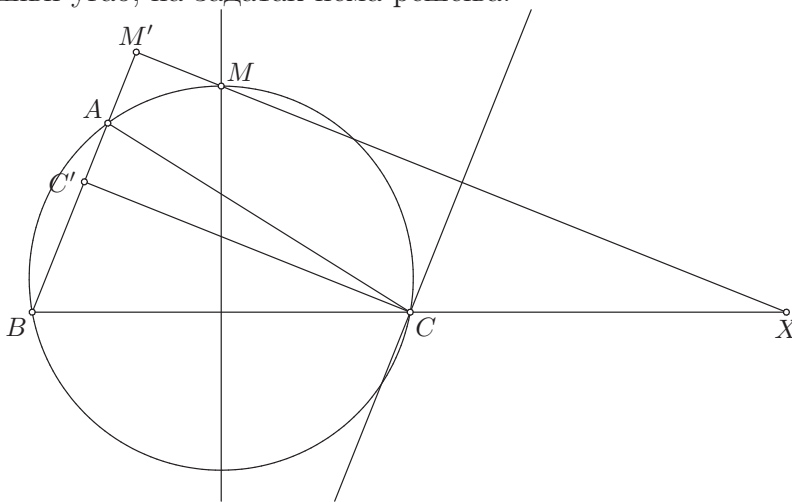
Доказ: Треба доказати да је $\angle ABC = \beta$, $AC + AB = b + c$ и да је висина из темена C подударна дужи h_c .

ПК је $\angle M'BC = \beta$ и $A, M' \div BC$. Следи да је $\angle ABC = \angle M'BC = \beta$.

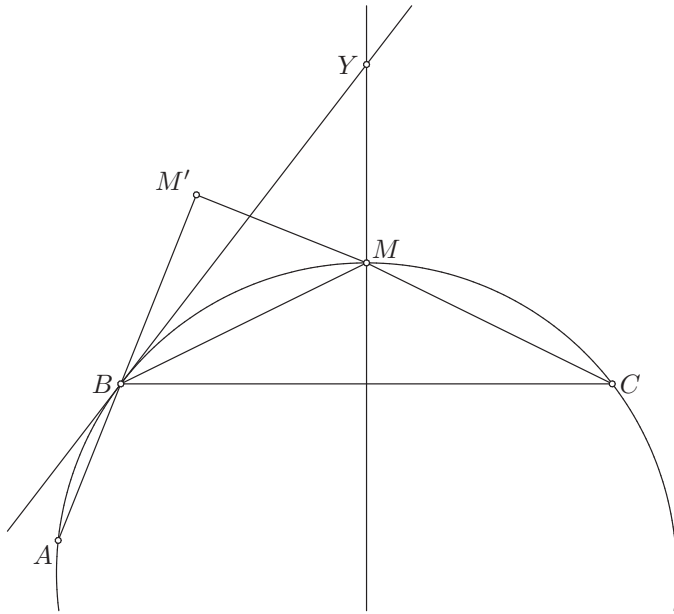
Тачка C припада правој која је паралелна правој BM' , тј. правој AB и налази се на растојању h_c од ње. Ако је CC' висина из темена C , тј. ако је C' тачка на правој AB и $CC' \perp AB$, следи да је $CC' = h_c$ (дуж која је нормална на паралелним правима подударна је растојању између њих).

ПК круг l садржи тачке A, B, C , па је то описани круг троугла $\triangle ABC$. ПК тачка M припада медијатриси m стране BC и описаном кругу l троугла $\triangle ABC$. ПК важи $M, M' \div BC$ и $A, M' \div BC$, па следи да важи $A, M \div BC$. Према томе, тачка M је тачка из Великог задатка. Тачка M припада нормали n на правој BM' , односно правој AB , у тачки M' , па следи да је M' подножје нормале из тачке M на правој AB . Дакле, M' је тачка из Великог задатка. На основу Великог задатка је $BM' = \frac{1}{2}(AC + AB)$, а како је ПК $BM' = \frac{1}{2}(b + c)$, следи да је $\frac{1}{2}(AC + AB) = \frac{1}{2}(b + c)$, тј. да је $AC + AB = b + c$.

Дискусија: Ако је $\beta \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.



Нека је $\beta < \pi$. Ако β није оштар, онда се нормала n на правој BM' у тачки M' и полуправа BC (крак угла $\angle M'BC = \angle M'Bq = \beta$) не секу. Тада је испуњено $M, M' \div BC$. Ако је пак β оштар, онда се нормала n и полуправа BC секу у некој тачки X . Услов да важи $M, M' \div BC$ је $\frac{1}{2}BC < BX$. Из $\cos \beta = \frac{BM'}{BX}$ добијамо $BX = \frac{BM'}{\cos \beta}$, па услов да важи $M, M' \div BC$ гласи $\frac{1}{2}BC < \frac{BM'}{\cos \beta}$. Како је $\sin \beta = \frac{CC'}{BC} = \frac{h_c}{BC}$, следи да је $BC = \frac{h_c}{\sin \beta}$, па добијамо $\frac{h_c}{2 \sin \beta} < \frac{b+c}{2 \cos \beta}$, тј. $h_c < (b + c) \operatorname{tg} \beta$.

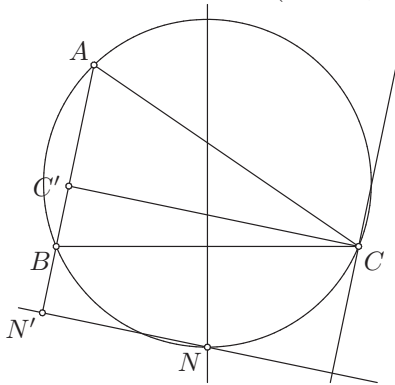


Остаје још да нађемо услов који ће обезбедити да се права BM' и круг l секу у тачкама A, B таквим да је $A, M' \doteq BC$. Нека је t тангента на кругу l у тачки B и нека је Y тачка на њој таква да важи $Y, M, M' \doteq BC$. Тада је $\angle YBM$ угао између тетиве BM и тангенте t , па је подударан периферијском углу $\angle BCM$ над тетивом BM . Троугао $\triangle BCM$ је једнакокрак, па су углови $\angle MBC$ и $\angle BCM$ подударни. Следи да је $\angle YBM = \angle BCM = \angle MBC$. Услов да важи распоред $A, M' \doteq BC$ је да је угао $\angle MBM'$ мањи од угла $\angle MBY$, тј. од њему подударног угла $\angle MBC$. Како је \cos опадајућа функција на $(0, \frac{\pi}{2})$ (и на $(0, \pi)$, али овде је примењујемо на оштре углове), овај услов је еквивалентан са условом $\cos \angle MBM' > \cos \angle MBC$, тј. $\frac{BM'}{BM} > \frac{\frac{1}{2}BC}{BM}$, односно $BM' > \frac{1}{2}BC$. Дакле, услов је $\frac{1}{2}(b+c) > \frac{1}{2} \frac{h_c}{\sin \beta}$, тј. $h_c < (b+c) \sin \beta$. Овај услов је јачи од постојећег услова $h_c < (b+c) \operatorname{tg} \beta$ за оштре углове β , јер је $\sin \beta < \operatorname{tg} \beta$ за све $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, па је услов $h_c < (b+c) \operatorname{tg} \beta$ за оштре углове β сувишан. Такође, услов $h_c < (b+c) \sin \beta$ мора важити за све $\beta \in (0, \pi)$ да би постојало решење.

Дакле, ако је $\beta < \pi$ и $h_c \geq (b+c) \sin \beta$, нема решења, а ако је $\beta < \pi$ и $h_c < (b+c) \sin \beta$, постоји јединствено решење до на подударност.

б) $\beta, h_c, b - c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је C' подножје висине из темена C . Тада је $\angle ABC = \beta$, $CC' = h_c$ и $AC - AB = b - c$ (дакле, мора бити $AC > AB$).



Нека су N, N' тачке из Великог задатка. Тада важи $A, N' \div BC$ (због $AB < AC$) и $NN' \perp AB$. Следи да је $\angle N'BC = \pi - \beta$. На основу Великог задатка следи да је $BN' = \frac{1}{2}(b - c)$. Из $CC' = h_c$ следи да тачка C припада правој која је паралелна правој AB , тј. правој BN' , налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BN' с које се налази крак BC угла $\angle N'BC$. Тачка N припада правој која је нормална на правој BN' у тачки N' и медијатриси дужи BC . Коначно, тачка A припада правој BN' и описаном кругу троугла $\triangle BCN$, јер је то у ствари описани круг троугла $\triangle ABC$ коме тачка N припада на основу задатка 1.9.

Конструкција: Конструиримо дуж $BN' = \frac{1}{2}(b - c)$. Конструиримо угао $\angle N'Bq = \pi - \beta$. Конструиримо праву p која је паралелна правој BN' , налази се на растојању h_c од ње и налази се с оне стране праве BN' с које се налази крак Bq угла $\angle N'Bq$. У пресеку праве p и крака Bq означимо тачку C . Конструиримо медијатрису m дужи BC . Конструиримо нормалу n на правој BN' у тачки N' . У пресеку правих m и n означимо са N тачку такву да важи $N, N' \div BC$. Конструиримо описани круг l троугла $\triangle BCN$. У пресеку круга l и праве BN' означимо са A тачку такву да важи $\mathcal{B}(A, B, N')$.

Доказ: Треба доказати да је $\angle ABC = \beta$, $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$, као и да је висина из темена C подударна дужи h_c .

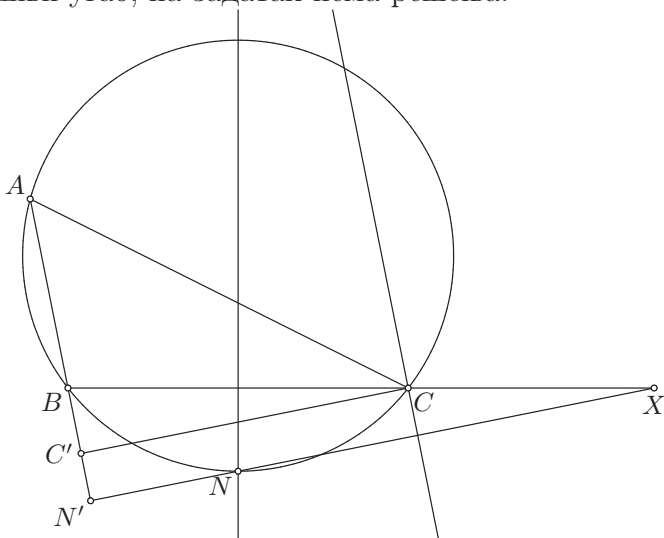
ПК важи $\mathcal{B}(A, B, N')$ и $\angle N'BC = \pi - \beta$, па је $\angle ABC = \pi - \angle N'BC = \pi - (\pi - \beta) = \beta$.

Тачка C припада правој која је паралелна правој BN' , тј. правој AB и налази се на растојању h_c од ње. Ако је CC' висина из темена C , тј.

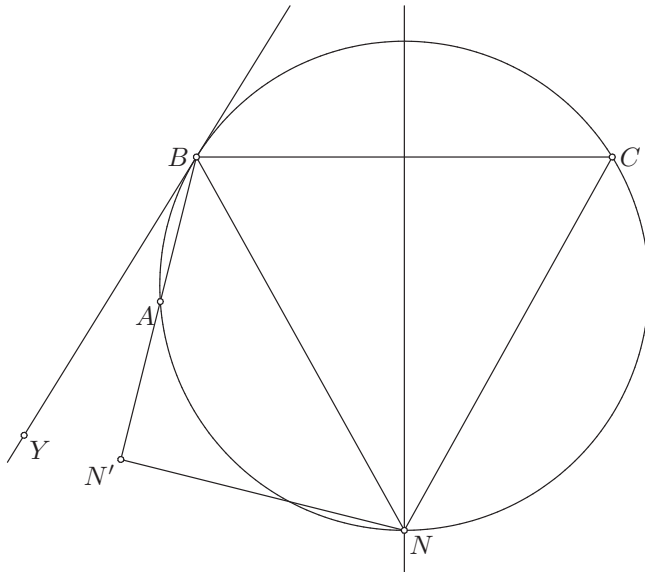
ако је C' тачка на правој AB и $CC' \perp AB$, следи да је $CC' = h_c$ (дуж која је нормална на паралелним правима подударна је растојању између њих).

Круг l садржи тачке A, B, C , па је то описани круг троугла $\triangle ABC$. Тачка N припада медијатриси m странеце BC и описаном кругу l троугла $\triangle ABC$. ПК важи $\mathcal{B}(A, B, N')$, па следи да важи $A, N' \div BC$, а како ПК важи $N, N' \div BC$, следи да важи $A, N \div BC$. Према томе, тачка N је тачка из Великог задатка. Тачка N припада нормали n на правој BN' , односно правој AB , у тачки N' , па следи да је N' подножје нормале из тачке N на правој AB . Дакле, N' је тачка из Великог задатка. Због $\mathcal{B}(A, B, N')$, следи да је $AN' > AB$, а на основу Великог задатка је $AN' = \frac{1}{2}(AC + AB)$ (ово важи без обзира на то да ли је $AB < AC$ или није), па следи да је $\frac{1}{2}(AC + AB) > AB$, односно $AC + AB > 2AB$, тј. $AC > AB$. Сада основу Великог задатка следи да је $BN' = \frac{1}{2}(AC - AB)$, а како је ПК $BN' = \frac{1}{2}(b - c)$, следи да је $\frac{1}{2}(AC - AB) = \frac{1}{2}(b - c)$, тј. да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Ако је $\beta \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.



Нека је $\beta < \pi$. Ако β није туп, онда $\pi - \beta$ није оштар, па се нормала n на правој BN' у тачки N' и полуправа BC (крак угла $\angle N'BC = \angle N'Bq = \pi - \beta$) не секу. Тада је испуњено $N, N' \div BC$. Ако је пак β туп, тј. $\pi - \beta$ оштар, онда се нормала n и полуправа BC секу у некој тачки X . Услов да важи $N, N' \div BC$ је $\frac{1}{2}BC < BX$. Из $\cos(\pi - \beta) = \frac{BN'}{BX}$ добијамо $BX = \frac{BN'}{\cos(\pi - \beta)}$, па услов да важи $N, N' \div BC$ гласи $\frac{1}{2}BC < \frac{BN'}{\cos(\pi - \beta)}$. Како је $\sin(\pi - \beta) = \frac{CC'}{BC}$, следи да је $BC = \frac{CC'}{\sin(\pi - \beta)} = \frac{h_c}{\sin(\pi - \beta)}$, па добијамо $\frac{h_c}{2 \sin(\pi - \beta)} < \frac{b - c}{2 \cos(\pi - \beta)}$, тј. $h_c < (b - c) \operatorname{tg}(\pi - \beta)$.

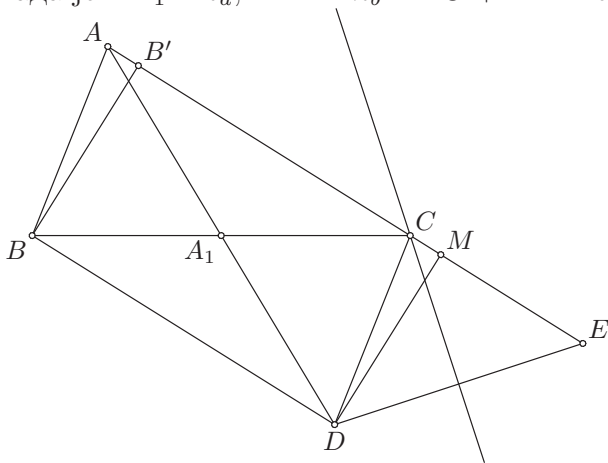


Остаје још да нађемо услов који ће обезбедити распоред $\mathcal{B}(A, B, N')$. Нека је t тангента на кругу l у тачки B и нека је Y тачка на њој таква да важи $Y, N, N' \doteq BC$. Тада је $\angle YBN$ угао између тетиве BN и тангенте t , па је подударан периферијском углу $\angle BCN$ над тетивом BN . Троугао $\triangle BCN$ је једнакокрак, па су углови $\angle NBC$ и $\angle BCN$ подударни. Следи да је $\angle YBN = \angle BCN = \angle NBC$. Услов да важи распоред $\mathcal{B}(A, B, N')$ је да је угао $\angle N'BN$ већи од угла $\angle YBN$, тј. од њему подударног угла $\angle NBC$. Како је \cos опадајућа функција на $(0, \frac{\pi}{2})$ (и на $(0, \pi)$, али овде је примењујемо на оштре углове), овај услов је еквивалентан са условом $\cos \angle N'BN < \cos \angle NBC$, тј. $\frac{BN'}{BN} < \frac{\frac{1}{2}BC}{BN}$, односно $BN' < \frac{1}{2}BC$. Дакле, услов је $\frac{1}{2}(b - c) < \frac{1}{2} \frac{h_c}{\sin \beta}$, тј. $(b - c) \sin \beta < h_c$ (важи $\sin(\pi - \beta) = \sin \beta$).

Према томе, ако је $\beta \leq \frac{\pi}{2}$ и $(b - c) \sin \beta < h_c$, задатак има јединствено решење до на подударност. Такође, ако је $\beta > \frac{\pi}{2}$ и $(b - c) \sin \beta < h_c < (b - c) \operatorname{tg}(\pi - \beta)$, задатак има јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима задатак нема решења.

5) а) $t_a, h_b, b + c$

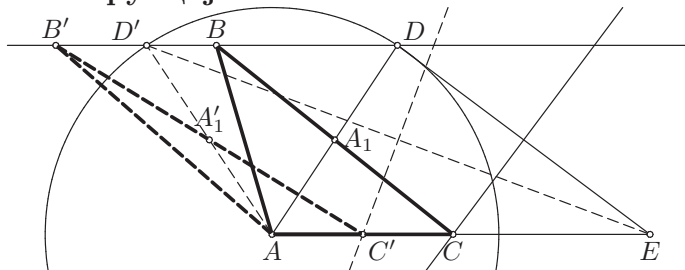
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је B' подножје висине из темена B . Тада је $AA_1 = t_a$, $BB' = h_b$ и $AC + AB = b + c$.



Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на тачку A_1 . Тада је $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$. У четвороуглу $ABDC$ дијагонале AD и BC имају заједничко средиште A_1 , па је то паралелограм. Следи да је $BD \parallel AC$ и $BD = AC$, као и $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Нека је M подножје нормале из тачке D на правој AC и нека је E тачка таква да је $\angle(A, C, E)$ и $CE = CD$. Тада је $AE = AC + CE = AC + CD = AC + AB = b + c$, а како је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AC$, следи да је $BB' \parallel DM$. Због $BD \parallel AC$, тј. $BD \parallel B'M$, следи да је $BDMB'$ паралелограм (штавише, због услова $BB' \perp B'M$ је и правоугаоник), па је $DM = BB' = h_b$.

У троуглу $\triangle ADE$ је $AD = 2t_a$ и $AE = b + c$, а висина DM је подударна дужи h_b . То значи да тачка D припада правој која је паралелна правој AE и налази се на растојању h_b од ње, као и да припада кругу с центром у A и полупречником $2t_a$. Због $CD = CE$ следи да тачка C припада симетрали дужи DE . Тачка D је симетрична тачки A у односу на тачку A_1 , па је A_1 средиште дужи AD . Такође, тачка A_1 је средиште дужи BC , па следи да је тачка B симетрична тачки C у односу на тачку A_1 .

Конструкција:



Конструиримо дуж $AE = b + c$. Конструиримо праву p паралелну са AE на растојању h_b од ње. Конструиримо круг $k(A, 2t_a)$. У пресеку круга k и праве p означимо тачку D . Конструиримо симетралу дужи DE . У њеном пресеку с дужи AE означимо тачку C (дакле, $\mathcal{B}(A, C, E)$). Означимо с A_1 средиште дужи AD и са B тачку симетричну тачки C у односу на тачку A_1 .

Доказ: Треба доказати да је тежишна дуж из темена A подударна дужи t_a , да је висина из темена B подударна дужи h_b и да је $AC + AB = b + c$.

ПК је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, па је AA_1 тежишна дуж из темена A . Такође, ПК је $AD = 2t_a$ и A_1 је средиште дужи AD , па следи да је $AA_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}2t_a = t_a$.

Дијагонале AD и BC четвороугла $ABDC$ имају заједничко средиште A_1 , па је у питању паралелограм. Следи да је $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, као и $AC \parallel BD$ и $AC = BD$. Нека је M подножје висине из темена B троугла $\triangle ABC$. Како C припада правој AE , следи да су праве AC и AE исте, па из $AC \parallel BD$ следи да је $AE \parallel BD$. Права p садржи D и паралелна је са AE , па како и права BD садржи D и паралелна је са AE , следи да су праве p и BD исте, тј. да $B \in p$. Све тачке с праве p су на растојању h_b од праве AE , тј. од праве AC , па како је $BM \perp AC$, следи да је $BM = h_b$, што је и требало доказати.

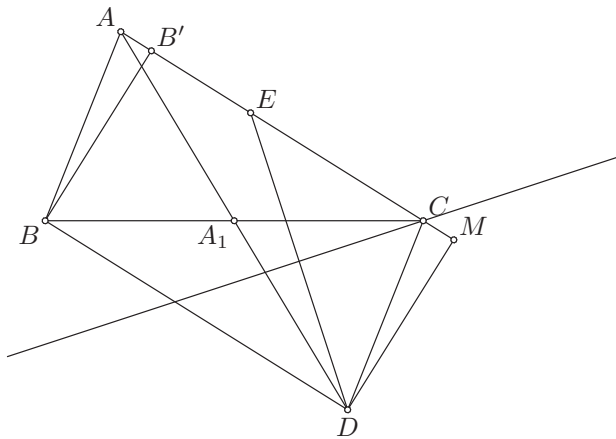
Коначно, C припада симетрали дужи DE , па је $CD = CE$, што заједно са $AB = CD$ даје $CE = AB$. По конструкцији је $\mathcal{B}(A, C, E)$, па је $AE = AC + CE = AC + AB$, а такође је по конструкцији $AE = b + c$, па следи да је $AC + AB = b + c$.

Дискусија: Да би круг $k(A, 2t_a)$ и права p имали заједничких тачака, мора бити $2t_a \geq h_b$. Заиста, права p је на растојању h_b од праве AE , што значи да за сваку тачку X са праве p важи $XA \geq h_b$. Ако је $2t_a = h_b$, онда имамо јединствену пресечну тачку D праве p и круга $k(A, 2t_a)$, а ако је $2t_a > h_b$, имамо две такве тачке D . Из Дискусије у делу **3**) овог задатка следи да симетрала странице DE троугла $\triangle ADE$ сече страницу AE у тачки C таквој да је $\mathcal{B}(A, C, E)$ ако и само ако је $AD < AE$, тј. ако и само ако је $2t_a < b + c$.

Дакле, ако је $h_b = 2t_a < b + c$, задатак има јединствено решење до на подударност. Ако је $h_b < 2t_a < b + c$, задатак има два неподударна решења. У осталим случајевима задатак нема решења.

б) $t_a, h_b, b - c$

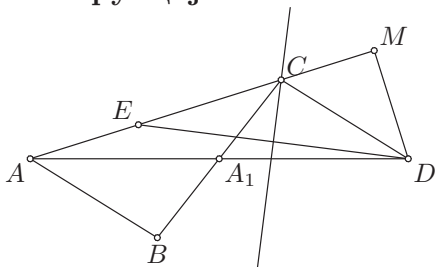
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $AC > AB$. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је B' подножје висине из темења B . Тада је $AA_1 = t_a$, $BB' = h_b$ и $AC - AB = b - c$.



Нека је D тачка симетрична тачки A у односу на тачку A_1 . Тада је $AD = AA_1 + A_1D = 2AA_1 = 2t_a$. У четвороуглу $ABDC$ дијагонале AD и BC имају заједничко средиште A_1 , па је то паралелограм. Следи да је $BD \parallel AC$ и $BD = AC$, као и $AB \parallel CD$ и $AB = CD$. Нека је M подножје нормале из тачке D на правој AC и нека је E тачка таква да је $\mathcal{B}(A, E, C)$ и $CE = CD$. Тада је $AE = AC - CE = AC - CD = AC - AB = b - c$ и троугао $\triangle CDE$ је једнакокрак, па важи $\angle CED = \angle CDE$ и то су оштри углови. Следи да је $\angle AED = \pi - \angle CED$ туп угао, па важи распоред $\mathcal{B}(A, E, M)$. Дакле, тачка E је на страници AM таква да је $AE = b - c$. Како је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AC$, следи да је $BB' \parallel DM$. Због $BD \parallel AC$, тј. $BD \parallel B'M$, следи да је $BDMB'$ паралелограм (штавише, због $BB' \perp B'M$ је и правоугаоник), па је $DM = BB' = h_b$.

У троуглу $\triangle ADM$ је $AD = 2t_a$, $DM = h_b$ и $\angle AMD = \frac{\pi}{2}$, па унемо да га конструишемо. Тачка E је таква да је $\mathcal{B}(A, E, M)$ и $AE = b - c$. Због $CD = CE$ следи да тачка C припада симетрали дужи DE . Тачка D је симетрична тачки A у односу на тачку A_1 , па је A_1 средиште дужи AD . Такође, тачка A_1 је средиште дужи BC , па следи да је тачка B симетрична тачки C у односу на тачку A_1 .

Конструкција:



Конструиримо троугао $\triangle ADM$ такав је $AD = 2t_a$, $DM = h_b$ и $\angle AMD = \frac{\pi}{2}$. На дужи AM означимо тачку E такву да је $AE = b - c$ (дакле, $\mathcal{B}(A, E, M)$). Конструиримо симетралу дужи ED и означимо са C њен пресек са правом AE тако да важи $\mathcal{B}(A, E, C)$. Означимо са A_1 средиште дужи AD и означимо са B тачку симетричну тачки C у односу на тачку A_1 .

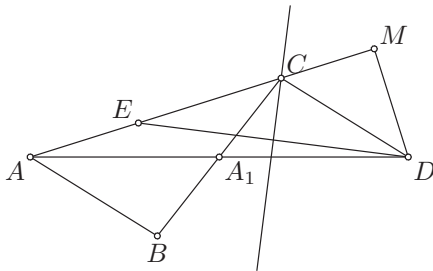
Доказ: Треба доказати да је тежишна дуж из темена A подударна дужи t_a , да је висина из темена B подударна дужи h_b и да је $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$.

ПК је A_1 средиште странице BC троугла $\triangle ABC$, па је AA_1 тежишна дуж из темена A . Такође, ПК је $AD = 2t_a$ и A_1 је средиште дужи AD , следи да је $AA_1 = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}2t_a = t_a$.

Дијагонале AD и BC четвороугла $ABDC$ имају заједничко средиште A_1 , па је у питању паралелограм. Следи да је $AB \parallel CD$ и $AB = CD$, као и $AC \parallel BD$ и $AC = BD$. Нека је B' подножје висине из темена B троугла $\triangle ABC$. ПК је $BB' \perp AC$ и $DM \perp AM$, а како су A, C, M колинеарне, следи да је $BB' \perp AM$, па важи $BB' \parallel DM$. Ово заједно са $AC \parallel BD$ и чињеницом да су праве $B'M$ и AC исте јер су тачке A, B', M, C колинеарне, следи да је $BD \parallel B'M$, па је четвороугао $BB'MD$ паралелограм (штавише правоугаоник, јер је $BB' \perp B'M$), што значи да је $BB' = DM$. ПК је $DM = h_b$, па је $BB' = h_b$.

Коначно, C припада симетрали дужи DE , па је $CD = CE$, што заједно са $AB = CD$ даје $CE = AB$. ПК је $\mathcal{B}(A, E, C)$, па је $AC > CE$, односно $AC > AB$. Такође, важи $AE = AC - CE = AC - AB$, а ПК је $AE = b - c$, па следи да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Да би троугао $\triangle ADM$ могао да се конструише, мора бити $AD > DM$ (јер је AD хипотенуза, а DM је катета правоуглог троугла $\triangle ADM$), тј. мора бити $2t_a > h_b$. Даље, да би било $\mathcal{B}(A, E, M)$, мора бити $AE < AM$. Из Питагорине теореме следи да је $AD^2 = AM^2 + DM^2$, па је $AM = \sqrt{AD^2 - DM^2} = \sqrt{(2t_a)^2 - h_b^2} = \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$. Дакле, како је $AE = b - c$, добијамо услов $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$.

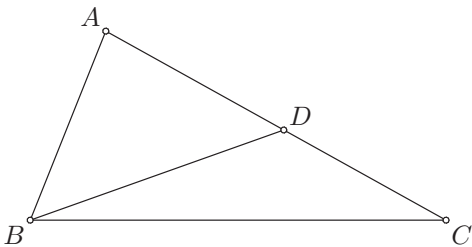


Остаје још да проверимо да ли је испуњено $\mathcal{B}(A, E, C)$. Угао $\angle MED$ је оштар, јер је један од углова правоуглог троугла $\triangle MED$ који није прав ($\angle EMD = \angle AMD = \frac{\pi}{2}$ јер важи $\mathcal{B}(A, E, M)$). Следи да симетрала дужи ED сече крак EM оштрог угла $\angle MED$ у тачки C таквој да важи $M, C \doteq E$, па како важи $A, M \doteq E$, следи да важи $A, C \doteq E$, тј. $\mathcal{B}(A, E, C)$.

Према томе, ако је $2t_a > h_b$ и $b - c < \sqrt{4t_a^2 - h_b^2}$, постоји јединствено решење до на подударност. У свим осталим случајевима, задатак нема решења.

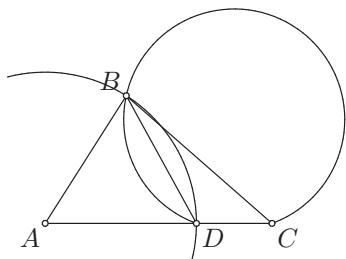
б) $\beta - \gamma, b, c$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\angle ABC > \angle ACB$ и важи $AC = b$, $AB = c$ и $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$.



Како је наспрам већег угла већа страница, следи да је $AC > AB$, тј. да је $b > c$. Нека је D тачка таква да је $\mathcal{B}(A, D, C)$ и $AD = AB$. Тада је троугао $\triangle ABD$ једнакокрак, па је $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\pi - \angle BAC}{2} = \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2}$. С друге стране, угао $\angle ADB$ је спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\angle CBD = \varphi$ и $\angle BCD = \angle BCA = \gamma$. Дакле, $\frac{\beta + \gamma}{2} = \varphi + \gamma$, па је $\varphi = \frac{\beta + \gamma}{2} - \gamma = \frac{\beta + \gamma - 2\gamma}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$. Дакле, $\angle CBD = \frac{\beta - \gamma}{2}$, тј. дуж CD се из тачке B види под углом $\frac{\beta - \gamma}{2}$.

Конструкција:



Конструишимо дуж $AC = b$. Означимо тачку D такву да је $\mathcal{B}(A, D, C)$ и $AD = c$. Конструишимо један од лукова ГМТ из којих се дуж CD види под углом $\frac{\beta - \gamma}{2}$ и означимо га са l . Конструишимо круг $k(A, AD)$. Означимо са B ону пресечну тачку круга k и лука l која није тачка D .

Доказ: Треба доказати да је $\angle ABC > \angle ACB$ и да је $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$, као и да је $AC = b$ и $AB = c$.

ПК је $AC = b$. Тачка B припада кругу $k(A, AD)$ и ПК је $AD = c$, па је $AB = AD = c$. ПК је $\mathcal{B}(A, D, C)$, па је $AC > AD$. Због $AD = AB$ следи да је $AC > AB$, па је и $\angle ABC > \angle ACB$. Тачка B припада луку l ГМТ из којих се дуж CD види под углом $\frac{\beta - \gamma}{2}$, па следи да је $\angle CBD = \frac{\beta - \gamma}{2}$. С друге стране, троугао $\triangle ABD$ је једнакокрак, па је $\angle ADB = \angle ABD = \frac{\pi - \angle BAD}{2}$, а угао $\angle ADB$ је спољашњи угао троугла $\triangle BCD$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова, тј. $\angle ADB = \angle CBD + \angle BCD$. Због распореда $\mathcal{B}(A, D, C)$ је $\angle BAD = \angle BAC$ и $\angle BCD = \angle BCA$. Следи да је

$$\begin{aligned} \angle CBD &= \angle ADB - \angle BCD = \frac{\pi - \angle BAD}{2} - \angle BCD \\ &= \frac{\pi - \angle BAC}{2} - \angle BCA = \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} - \angle BCA \\ &= \frac{\angle ABC + \angle ACB - 2\angle BCA}{2} = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}. \end{aligned}$$

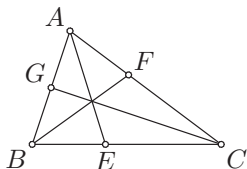
Дакле, важи $\frac{\angle ABC - \angle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$, па следи да је $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$.

Дискусија: Ако је $b \leq c$ или $\beta - \gamma \geq \pi$, задатак нема решења.

Нека је $b > c$ и $\beta - \gamma < \pi$. Све што треба проверити јесте да ли круг k и лук l осим тачке D имају још заједничких тачака. Круг k и лук l се секу само у тачки D ако и само ако центар O лука l припада дужи CD или важи $l, O \div CD$, што важи ако и само ако је угао под којим се са лука l види дуж CD прав или туп, односно ако и само ако је $\frac{\beta - \gamma}{2} \geq \frac{\pi}{2}$, тј. $\beta - \gamma \geq \pi$, што није тачно.

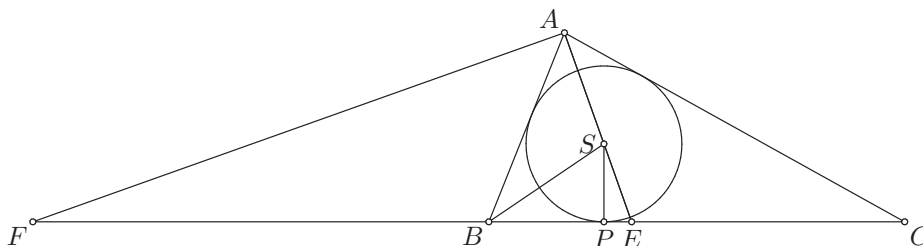
Дакле, ако је $b > c$ и $\beta - \gamma < \pi$, онда задатак има јединствено решење до на подударност, а у осталим случајевима нема решења.

Дефиниција 22. Нека је $\triangle ABC$ троугао и нека су E, F, G редом пресечне тачке бисектриса унутрашњих углова код темена A, B, C и наспрамних страница BC, CA, AB . Дужи AE, BF, CG зову се *одсечци бисектриса унутрашњих углова* и означавају се редом са l_a, l_b, l_c .



7) $\beta - \gamma, l_a, \rho$

Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $\angle ABC > \angle ACB$ и $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$. Нека је S центар уписаног круга троугла $\triangle ABC$, нека је E пресечна тачка симетрале угла $\angle BAC$ и странице BC и нека је P подножје нормале из тачке S на страници BC . Следи да је $AE = l_a$ и $SP = \rho$.

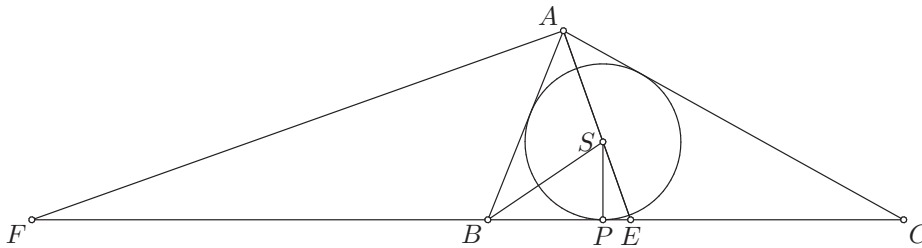


Из $\angle ABC > \angle ACB$ следи да је $AC > AB$, па постоји пресечна тачка симетрале спољашњег угла код темена A и праве BC . Означимо је са F . Тада важи распоред тачака $B(F, E, C)$. Угао $\angle ABC$ је спољашњи угао троугла $\triangle AFB$, па је једнак збиру унутрашњих несуседних углова $\angle AFB$ и $\angle FAB$, а угао $\angle FAE$ је прав, јер је то угао између симетрале унутрашњег и спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$. Следи да је $\angle FAB = \angle FAE - \angle BAE = \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}$, па је $\angle ABC = \angle AFB + \angle FAB = \angle AFB + \frac{\pi}{2} - \frac{\angle BAC}{2}$. Дакле, $\angle AFB = \angle ABC - \frac{\pi}{2} + \frac{\angle BAC}{2} = \frac{2\angle ABC - \angle BAC - \angle ACB + \angle BAC}{2} = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

У троуглу $\triangle AFE$ је $AE = l_a$, $\angle AFE = \angle AFB = \frac{\beta - \gamma}{2}$ и $\angle FAE = \frac{\pi}{2}$, па тај троугао унемо да конструишемо. Како је P подножје нормале из тачке S на страници BC , тј. на правој FE и важи $SP = \rho$, следи да тачка S припада правој p која је паралелна са FE и налази се на растојању ρ од ње. При томе важи $A, S \ddot{=} BC$, тј. $A, S \ddot{=} FE$, па важи и $A, p \ddot{=} FE$. Уписани круг $k(S, \rho)$ додирује странице AB и AC , па су праве AB и AC тангенте из тачке A на уписаном кругу k троугла $\triangle ABC$. Тачке B, C су у пресеку тих тангенти и праве FE тако да важи распоред тачака $B(F, B, E, C)$.

Конструкција: Конструиримо троугао $\triangle AFE$ такав да је $AE = l_a$, $\angle AFE = \frac{\beta - \gamma}{2}$ и $\angle FAE = \frac{\pi}{2}$. Конструиримо праву p паралелну са FE која се налази на растојању ρ од ње и за коју важи $A, p \perp FE$. У пресеку праве p и дужи AE означимо тачку S (дакле, важи $\mathcal{B}(A, S, E)$). Конструиримо круг $k(S, \rho)$ и конструиримо тангенте из тачке A на кругу k . У пресеку тих тангенти и праве FE означимо тачке B, C тако да важи $\mathcal{B}(F, B, E, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $\angle ABC > \angle ACB$ и да је $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$, затим да је одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена A подударан дужи l_a и да је полупречник уписаног круга подударан дужи ρ .



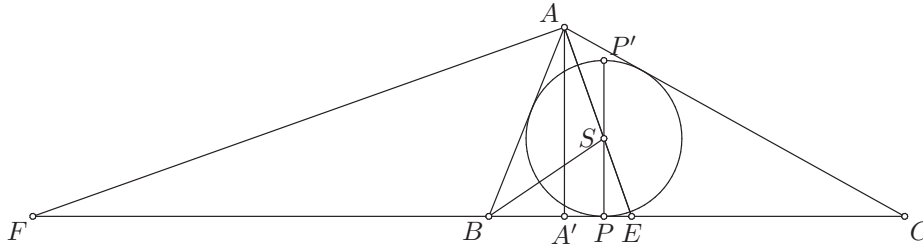
Тачка S је ПК на растојању ρ од праве FE , тј. од праве BC , па како је ПК k круг с центром у S и полупречником ρ , следи да је BC тангента круга k . ПК тачке B, C припадају тангентима круга k из тачке A , па су праве AB, AC тангенте круга k . ПК важи распоред $\mathcal{B}(B, E, C)$, па полуправа AE припада углу $\angle BAC$. При томе, за тачку S са ње важи да је растојање од крака AB тог угла подударно дужи ρ , као и растојање од крака AC тог угла (јер круг $k(S, \rho)$ додирује праве AB и AC), па је полуправа AE бисектриса угла $\angle BAC$. Према томе, круг k је или уписани круг троугла $\triangle ABC$ или је споља уписани круг који додирује страницу BC (у Великом задатку означен са $k_a(S_a, \rho_a)$). Како важи $\mathcal{B}(A, S, E)$, закључујемо да је k уписани круг троугла $\triangle ABC$, па је његов полупречник ρ , што је и требало доказати,

Такође, како је полуправа AE бисектриса унутрашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$, следи да је E тачка у пресеку те бисектрисе и странице BC , па је AE одсечак бисектрисе унутрашњег угла код темена A , а ПК је та дуж подударна дужи l_a .

Како је $\angle FAE = \frac{\pi}{2}$, следи да је AF бисектриса спољашњег угла код темена A троугла $\triangle ABC$ (јер је нормална на бисектриси AE унутрашњег угла код темена A). Угао $\angle AEF$ је оштар (јер је угао правоуглог троугла $\triangle AFE$ који није прав угао) и он је спољашњи угао троугла $\triangle AEC$, па је једнак збиру његових унутрашњих несуседних углова $\angle EAC = \frac{\angle BAC}{2}$ и $\angle ACE = \angle ACB$. Дакле, $\frac{\angle BAC}{2} + \angle ACB < \frac{\pi}{2}$, па следи да је и $\angle BAC + 2\angle ACB < \pi = \angle BAC + \angle ABC + \angle ACB$, тј. $\angle ACB < \angle ABC$.

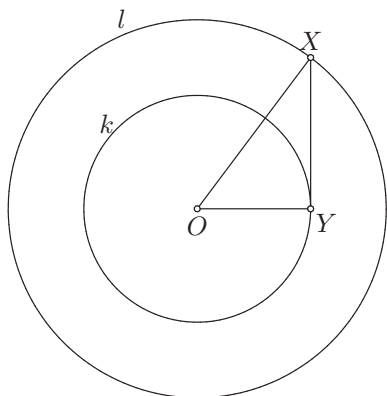
У делу Анализа је доказано да је тада $\angle AFB = \frac{\angle ABC - \angle ACB}{2}$, а како ПК важи $\mathcal{B}(F, B, E)$ и $\angle AFE = \frac{\beta - \gamma}{2}$, следи да је $\angle AFB = \frac{\beta - \gamma}{2}$. Према томе, $\frac{\angle ABC - \angle ACB}{2} = \frac{\beta - \gamma}{2}$, тј. $\angle ABC - \angle ACB = \beta - \gamma$.

Дискусија: Ако је $\beta - \gamma \geq \pi$, задатак нема решења.



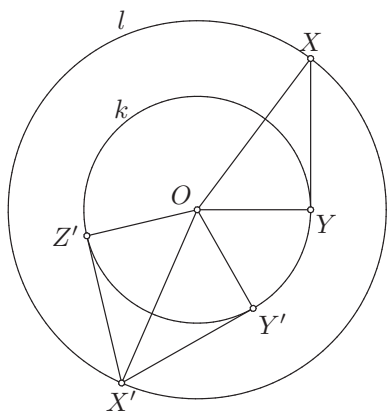
Нека је $\beta - \gamma < \pi$. Тада је $\frac{\beta - \gamma}{2} < \frac{\pi}{2}$, па постоји троугао $\triangle AFE$ и јединствен је до на подударност. Нека је A' подножје висине из темена A у троуглу $\triangle AFE$. Тада углови $\angle A'AE$ и $\angle AFE = \frac{\beta - \gamma}{2}$ имају нормалне краке, па је $\angle A'AE = \frac{\beta - \gamma}{2}$. Да би важило $\mathcal{B}(A, S, E)$, да би се тачка A налазила у спољашњости круга $k(S, \rho)$ и да би тангенте круга k из тачке A секле праву FE у тачкама B, C таквим да важи $\mathcal{B}(F, B, E, C)$, потребно је и довољно да висина AA' буде већа од пречника круга k , тј. да важи $AA' > 2\rho$. Из правоуглог троугла $\triangle AA'E$ имамо $\cos \angle A'AE = \frac{AA'}{AE} = \frac{AA'}{l_a}$, тј. да је $AA' = l_a \cos \angle A'AE = l_a \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$. Према томе, услов је $l_a \cos \frac{\beta - \gamma}{2} > 2\rho$. Према томе, ако је $\beta - \gamma < \pi$ и $l_a \cos \frac{\beta - \gamma}{2} > 2\rho$, постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима, задатак нема решења.

Конструкција геометријског места тачака (ГМТ) из којих се дати круг види под датим углом



Нека је $k(O, r)$ дати круг и φ дати угао. Нека је $Y \in k$ произвољна и нека је X таква да троугао $\triangle OXY$ задовољава $\angle OYX = \frac{\pi}{2}$ и $\angle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Конструирамо затим круг $l(O, OX)$ и то је тражено ГМТ.

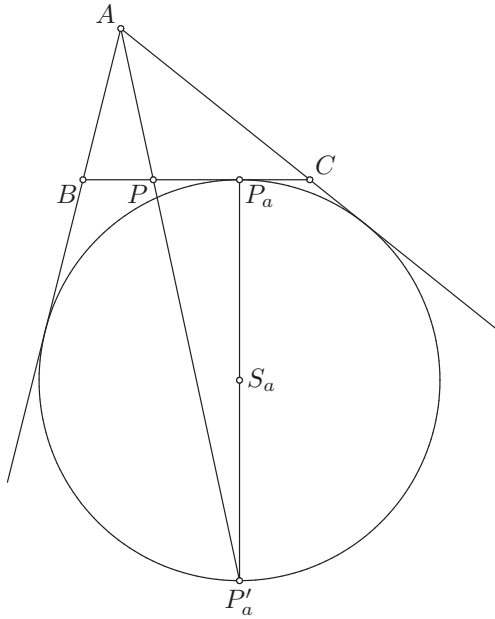
Покажимо да за сваку тачку X' са круга l важи да припада траженом ГМТ. Нека су Y', Z' додирне тачке тангенти круга k из тачке X' . Потребно је доказати да је $\angle Y'X'Z' = \varphi$. Троуглови $\triangle X'OY'$ и $\triangle XOY$ задовољавају да је $X'O = XO$, $OY' = OY$ и $\angle X'OY' = \frac{\pi}{2} = \angle XOY$, а углови $\angle OX'Y'$ и $\angle OXY$ су оба оштра (правоугли троуглови имају по један прав и два оштра угла). На основу става ССУ следи да је $\triangle X'OY' \cong \triangle XOY$, па је $\angle OX'Y' = \angle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Слично је и $\triangle X'OZ' \cong \triangle XOY$, па је $\angle OX'Z' = \angle OXY = \frac{\varphi}{2}$. Следи да је $\angle Y'X'Z' = \frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \varphi$.



Напомена 8. Ова конструкција је помоћна конструкција и уколико се користи у неком другом задатку, потребно је исписати њене кораке у етапи Конструкција (могу се навести одвојено од осталих корака, с назнаком да се ради о помоћној конструкцији). Није потребно доказивати да се из сваке тачке конструисаног круга дати круг види под датим углом.

8) $\alpha, b - c, \rho_a$

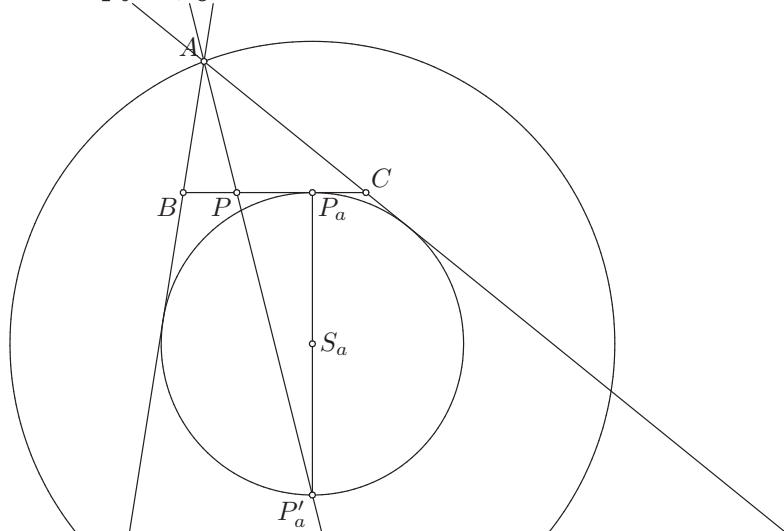
Анализа: Нека је $\triangle ABC$ троугао који испуњава услове задатка. Тада је $AC > AB$, $\angle BAC = \alpha$, $AC - AB = b - c$ и полупречник споља уписаног круга наспрам темена A је подударан дужи ρ_a .



Нека су P, S_a, P_a, P'_a тачке из Великог задатка. На основу Великог задатка следи да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$, као и $PP_a = b - c$.

У троуглу $\triangle PP_aP'_a$ је $PP_a = b - c$, $\angle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$ и $P_aP'_a = 2\rho_a$, па тај троугао унемо да конструишемо. Тачка S_a је средиште странице $P_aP'_a$ и можемо конструисати круг $k_a(S_a, \rho_a)$. Тачка A припада правој PP'_a тако да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ и из тачке A се круг k_a види под углом α . Тачке B, C су пресечне тачке тангенти круга k_a из тачке A и праве PP_a тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Конструкција:

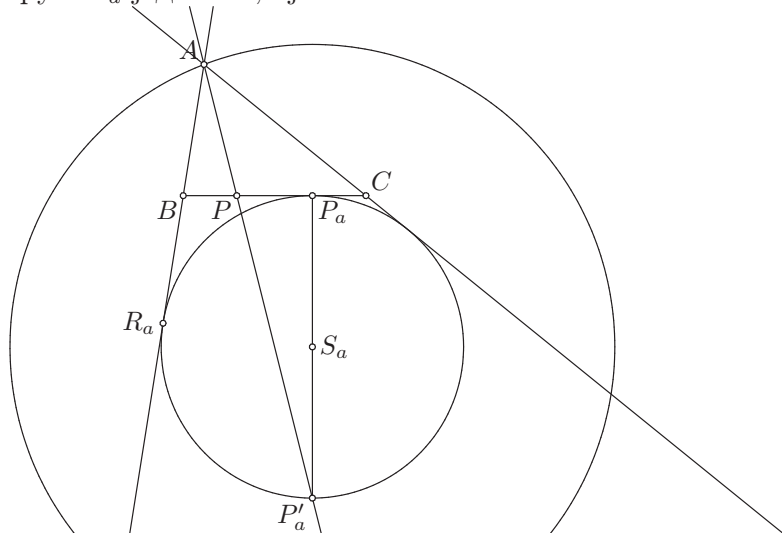


Конструишимо троугао $\triangle PP_aP'_a$ такав да је $PP_a = b - c$, $\angle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$ и $P_aP'_a = 2\rho_a$. Означимо са S_a средиште странице $P_aP'_a$ и конструишимо круг $k_a(S_a, \rho_a)$. Конструишимо ГМТ l из којих се круг k_a види под углом α . Означимо са A пресечну тачку ГМТ l и праве PP'_a такву да важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$. Конструишимо тангенте круга k_a из тачке A и означимо са B, C њихове пресеке са правом PP_a тако да важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$.

Доказ: Треба доказати да је $\angle BAC = \alpha$, $AC > AB$ и $AC - AB = b - c$, као и да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена A подударан дужи ρ_a .

Тачке B, C припадају тангентима круга k_a из тачке A , па су праве AB, AC тангенте круга k_a . ПК је S_a средиште $P_aP'_a$ и $\angle PP_aP'_a = \frac{\pi}{2}$, па следи да је $PP_a \perp P_aS_a$. ПК је $P_aP'_a = 2\rho_a$, па следи да је $S_aP_a = \frac{1}{2}P_aP'_a = \frac{1}{2}2\rho_a = \rho_a$, тј. S_aP_a је полупречник круга $k_a(S_a, \rho_a)$. Дакле, права PP_a је нормална на полупречнику круга k_a , па је она тангента тог круга. Штавише, како је $S_aP_a = \rho_a$, следи да је тачка P_a додирна тачка круга k_a и праве PP_a . Како ПК тачке B, C припадају правој PP_a и важи $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$, следи да је права BC исто што и права PP_a и да тачка P_a припада дужи BC , па круг k_a додирује страницу BC троугла $\triangle ABC$. Дакле, круг k_a је или уписани круг троугла $\triangle ABC$ или је споља уписани круг наспрам темена A . Како ПК важи $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ и $P \in BC$, следи да важи $A, P'_a \div BC$. Такође, S_a је средиште $P_aP'_a$ и $P_a \in BC$, па следи да важи $P'_a, S_a \div BC$. Према томе, важи $A, S_a \div BC$, па је k_a споља уписани круг који додирује страницу BC . Овим смо доказали и да је полупречник споља уписаног круга наспрам темена A троугла $\triangle ABC$ подударан дужи ρ_a .

ПК је l ГМТ из којих се круг $k_a(S_a, \rho_a)$ види под углом α . Како тачка A припада ГМТ l , следи да је угао $\angle BAC$ који граде тангенте AB, AC круга k_a једнак α , тј. $\angle BAC = \alpha$.

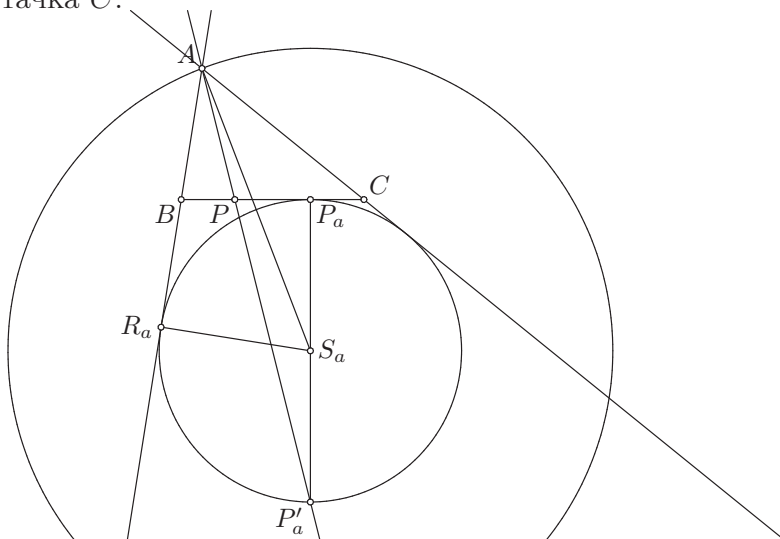


Тачке S_a, P_a су редом центар споља уписаног круга наспрам темена A и додирна тачка тог круга и стране BC . Тачка S_a је средиште дужи $P_aP'_a$, па је тачка P'_a дијаметрално супротна тачки P_a . На основу Великог задатка, став 1), следи да су теме A , додирна тачка уписаног круга и стране BC и тачка P'_a колинеарне и да су тим редом распоређене на правој која их садржи. Како је пресечна тачка праве AP'_a и стране BC тачка P , следи да је тачка P додирна тачка уписаног круга и стране BC . Нека је R_a додирна тачка споља уписаног круга k_a и праве AB . На основу Великог задатка је дуж AR_a подударна полуобиму троугла $\triangle ABC$, $BP_a = BR_a = AR_a - AB$ и $BP = AR_a - AC$. Како важи распоред $\mathcal{B}(B, P, P_a)$ следи да је $BP_a > BP$, па је $AR_a - AB > AR_a - AC$, тј. $AC > AB$. На основу Великог задатка је $PP_a = AC - AB$, а како је ПК $PP_a = b - c$, следи да је $AC - AB = b - c$.

Дискусија: Ако је $\alpha \geq \pi$, не постоји троугао $\triangle ABC$ коме је то унутрашњи угао, па задатак нема решења.

Нека је $\alpha < \pi$. Постоји троугао $\triangle PP_aP'_a$ и јединствен је до на подударност, па постоји и јединствено средиште S_a стране $P_aP'_a$. Полупречник S_aA круга l (ГМТ из којих се круг k_a види под углом α) је већи од ρ_a , па је тачка P'_a у унутрашњости круга l . Следи да права PP'_a сече круг l у двама тачкама, при чему је једна с исте стране тачке P'_a као тачка P , а друга је са супротне стране. Тачка A је она за коју важи $A, P \ddot{=} P'_a$, а да би важило $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ (пошто може важити и $\mathcal{B}(P, A, P'_a)$), мора важити $S_aA > S_aP$, тј. и тачка P мора бити унутар круга l . Из Питагорине тео-

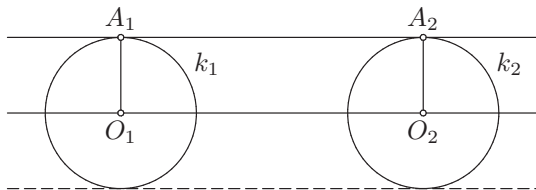
реме је $S_a P^2 = S_a P_a^2 + P_a P^2 = \rho_a^2 + (b - c)^2$, па је $S_a P = \sqrt{\rho_a^2 + (b - c)^2}$. У правоуглом троуглу $\triangle AS_a R_a$ је $S_a A$ хипотенуза, а катета $S_a R_a$ наспрам угла $\angle S_a A R_a = \frac{\alpha}{2}$ је подударна са полупречником ρ_a круга k_a , па је $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\rho_a}{S_a A}$, тј. $S_a A = \frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}}$. Дакле, имамо услов $\frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b - c)^2}$. Тачка A је у спољашњости круга k_a , услов $\mathcal{B}(A, P, P'_a)$ обезбеђује да тангенте круга k_a из тачке A секу праву PP_a тако да се тачке P, P_a налазе између тих пресечних тачака. Према томе, $\mathcal{B}(B, P, P_a, C)$ служи томе да се јединствено одреди која је од тих пресечних тачака тачка B , а која је тачка C .



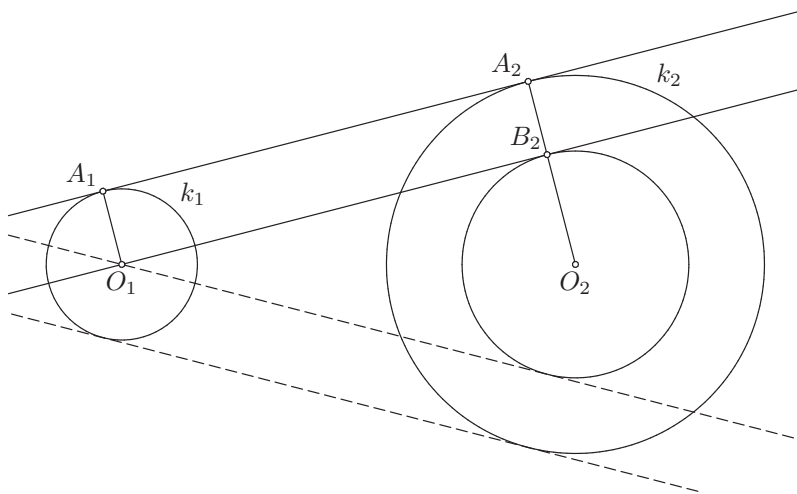
Према томе, ако је $\alpha < \pi$ и $\frac{\rho_a}{\sin \frac{\alpha}{2}} > \sqrt{\rho_a^2 + (b - c)^2}$, постоји јединствено решење до на подударност. У осталим случајевима задатак нема решења.

Конструкција заједничких спољашњих тангенти два круга

Нека су $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ дати кругови.



Ако је $r_1 = r_2$, конструишимо праву t која је паралелна са правом $O_1 O_2$ и налази се на растојању $r_1 (= r_2)$ од ње.



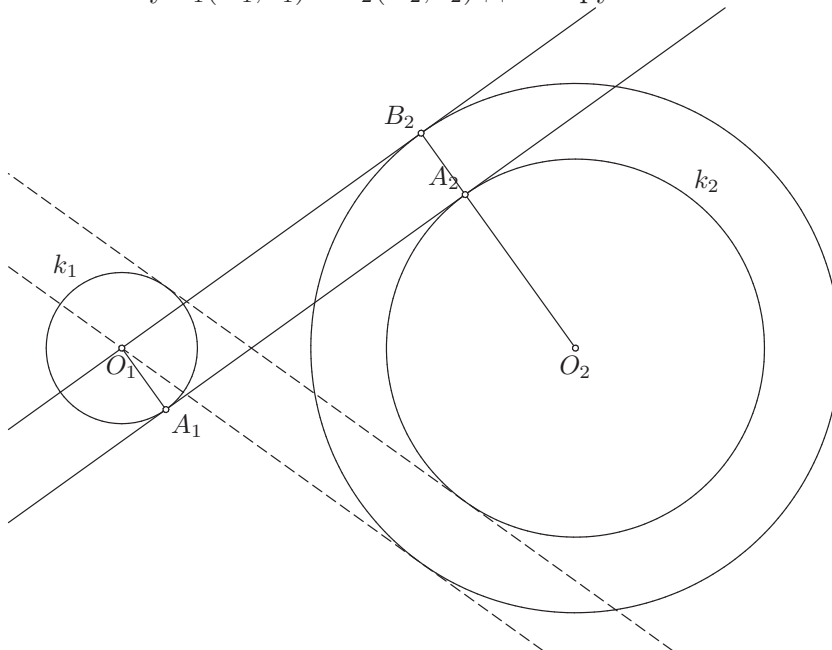
Без умањења општости претпоставимо да је $r_1 < r_2$ (ако није, тј. ако је $r_1 > r_2$, означимо тачку O_1 са O_2 и обратно, круг k_1 са k_2 и обратно и полупречник r_1 са r_2 и обратно). Конструирамо круг $k'_2(O_2, r_2 - r_1)$. Конструирамо тангенту t' круга k'_2 из тачке O_1 и конструирамо праву t која је паралелна са правом t' , налази се на растојању r_1 од ње и за коју важи $t, O_2 \div t'$.

Ако је $r_1 = r_2$ и $O_1 \neq O_2$, онда постоје тачно две праве t које су паралелне са O_1O_2 и налазе се на растојању $r_1 (= r_2)$ од ње, па постоје тачно две заједничке спољашње тангенте кругова k_1, k_2 . Ако је $r_1 = r_2$ и $O_1 = O_2$, онда се кругови k_1 и k_2 поклапају, па је свака тангента круга k_1 уједно и тангента круга k_2 , па постоји бесконачно много заједничких спољашњих тангенти.

Нека је без умањења општости $r_1 < r_2$. Да би постојала тангента круга $k'_2(O_2, r_2 - r_1)$ из тачке O_1 , она мора бити или на кругу k'_2 или у његовој спољашњости, тј. мора важити $O_1O_2 \geq r_2 - r_1$. Ако је $O_1O_2 = r_2 - r_1$, тада постоји јединствена тангента t' , па постоји и јединствена заједничка спољашња тангента кругова k_1, k_2 . Ако је $O_1O_2 > r_2 - r_1$, онда постоје две тангенте t' , па постоје и две заједничке спољашње тангенте кругова k_1, k_2 .

Конструкција заједничких унутрашњих тангенти два круга

Нека су $k_1(O_1, r_1)$ и $k_2(O_2, r_2)$ дати кругови.



Конструишимо круг $k'_2(O_2, r_2 + r_1)$. Конструишимо тангенту t' круга k'_2 из тачке O_1 и конструишимо праву t која је паралелна са правом t' , налази се на растојању r_1 од ње и за коју важи $t, O_2 \ddot{=} t'$.

Да би постојала тангента t' круга $k'_2(O_2, r_2 + r_1)$ из тачке O_1 , она се мора налазити на кругу k'_2 или у његовој спољашњости. Дакле, мора важити $O_1O_2 \geq r_2 + r_1$. Ако је $O_1O_2 = r_2 + r_1$, онда постоји јединствена тангента t' , па постоји и јединствена заједничка унутрашња тангента кругова k_1, k_2 . Ако је $O_1O_2 > r_2 + r_1$, онда постоје две тангенте t' , па постоје и две заједничке унутрашње тангенте кругова k_1, k_2 .

Напомена 9. Ове конструкције су такође помоћне конструкције и уколико се користе у неком другом задатку, потребно је исписати њихове кораке у етапи Конструкција (могу се навести одвојено од осталих корака, с назнаком да се ради о помоћној конструкцији). Услови под којима су ове конструкције могуће и одговарајући број тангенти могу се користити у етапи Дискусија без додатног образложења.